#Desafios SPM

Os #Desafios SPM destinam-se a alunos do 12.º ano que frequentam a disciplina de Matemática A. Pretendem mobilizar, em situações diversificadas, os conhecimentos e as capacidades que adquiriram durante o Ensino Secundário. Cada desafio tem um grau de complexidade suficiente para que a respetiva análise e eventual resolução, parcial ou completa, sirva de estímulo a um real progresso na formação matemática dos alunos. A cada exercício atribuiu-se um nível de complexidade de 1 a 3. Destes, mesmo os problemas de nível 1 foram construídos com o propósito desafiante comum a todos. Os #Desafios SPM não se constituem portanto, de forma alguma, como uma simulação de questões do Exame Nacional, já que os itens que integram os exames estão naturalmente sujeitos a restrições decorrentes das características próprias dessas provas de avaliação, substancialmente distintas das que motivaram a elaboração e seleção destes problemas.

#Probabilidades e Combinatória

Exercício 1

Nível de Complexidade: 1

Um saco opaco contém cartões indistinguíveis ao tato. Em 8 deles encontra-se inscrito um número positivo, e, nos restantes, um número negativo. Um jogador seleciona ao acaso dois desses cartões. Se o produto dos números assim escolhidos for positivo, o jogador ganha 1 euro. Caso contrário, perde 1 euro.
Seja X a variável aleatória «Ganho do jogador».

a. Mostre que o valor médio de X é igual a

$$\mu = \frac{n^2 - 33n + 256}{n(n-1)},$$

onde o número natural $n \geq 8$ representa o número total de cartões no saco.

b. Para que valores de n o jogo é desfavorável ao jogador?

c. Calcule $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2-33n+256}{n(n-1)}$ e interprete o resultado no contexto do problema.

#variáveis aleatórias #distribuição de probabilidade #extrações sem reposição #inequações do segundo grau #limites de sucessões

Exercício 2

Nível de Complexidade: 1

Seja P uma probabilidade e A um acontecimento tal que $0 < P(A) < 1$.
Seja B um acontecimento com $P(B) \neq 0$. Mostre que

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})},$$

igualdade que constitui um caso particular da fórmula dita «*de Bayes*».

#probabilidade condicionada #propriedades das medidas de probabilidade

Exercício 3

Nível de Complexidade: 1

Seja $n \in \mathbb{N}$. Mostre, utilizando a fórmula do binómio de Newton, que $2^n + 1$ é divisível por 3 se e só se n for impar. Sugestão: observe que $2 = 3 + (-1)$!

#binómio de Newton #divisibilidade

Exercício 4

Nível de Complexidade: 2

Um saco contém 100 moedas. Existem 20 moedas equilibradas e 80 moedas em que a probabilidade de sair «cara» aquando de um lançamento é igual a 0,8.
Escolheu-se uma destas moedas ao acaso. Aplique a fórmula de Bayes, demonstrada no Exercício 2, para responder às seguintes questões:

a. Lançou-se a moeda ao ar e saiu cara. Qual a probabilidade de se tratar de uma moeda equilibrada?
b. Seja $n \geq 2$. Sabendo que se atirou a moeda ao ar n vezes e que em todos estes lançamentos saiu cara, qual a probabilidade p_n de se tratar de uma moeda equilibrada?

   Calcule $\lim p_n$ e interprete este valor no contexto do problema.

#probabilidade condicionada #limites de sucessões

Exercício 5

Nível de Complexidade: 2

Um saco S_1 contém duas bolas brancas e quatro bolas pretas. Um outro saco S_2 contém quatro bolas brancas e cinco bolas pretas.

Escolhe-se um saco ao acaso e retira-se uma bola do seu interior. Regista-se a cor e volta-se a colocar a bola no saco que a continha.

Se a bola extraída for branca, retira-se de seguida uma bola do saco S_1. Caso seja preta, retira-se uma bola do saco S_2, repetindo-se sucessivamente este procedimento.

Seja p_n a probabilidade da n-ésima bola ser branca.

a. Mostre que

$$p_{n+1} = -\frac{1}{9}p_n + \frac{4}{9}.$$

b. Mostre que a sucessão de termo geral $u_n = p_n - \frac{2}{5}$ é geométrica.
c. Deduza uma expressão do termo geral da sucessão (p_n).
d. Calcule e interprete $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

#probabilidade condicionada #progressões geométricas #limites de sucessões

Exercício 6

Nível de Complexidade: 2

Neste exercício pretende-se calcular, para $n \in \mathbb{N}$, a soma

$$^{n}C_1 \times 1 + {}^{n}C_2 \times 2 + \cdots + {}^{n}C_{n-1} \times (n-1) + {}^{n}C_n \times n$$

a. Dado um número real a, desenvolva $(a+1)^n$ aplicando a fórmula do binómio de Newton.
   Escolhendo um valor adequado para a, deduza que a soma dos elementos da n-ésima linha do triângulo de Pascal é igual a 2^n.

b. Seja k um número inteiro, $1 \leq k \leq n$.

   Mostre que $^{n}C_k \times k = {}^{n-1}C_{k-1} \times n$.

c. Conclua que $^{n}C_1 \times 1 + {}^{n}C_2 \times 2 + \cdots + {}^{n}C_{n-1} \times (n-1) + {}^{n}C_n \times n = n2^{n-1}$.

#triângulo de Pascal #binómio de Newton #coeficientes binomiais

Exercício 7

Nível de Complexidade: 3

a. Dado um referencial Oxy e dois números inteiros não negativos p e q, consideramos os caminhos que ligam o ponto $M(p, q)$ à origem do referencial, construídos da seguinte forma: em cada etapa, deslocamo-nos uma unidade "para a esquerda" (isto é, no sentido contrário à orientação do eixo $0x$) ou uma unidade "para baixo" (isto é, no sentido contrário à orientação do eixo $0y$).

   Quantos destes caminhos existem?

b. O matemático Stefan Banach anda sempre com duas caixas de fósforos, uma no bolso esquerdo do casaco e outra no bolso direito. Quando precisa de um fósforo para acender o cachimbo, decide aleatoriamente retirá-lo de uma das duas caixas.
   Certo dia, abre uma das caixas e constata que esta se encontra vazia. Sabendo que inicialmente ambas as caixas continham $n \in \mathbb{N}$ fósforos, qual a probabilidade da outra caixa conter 1 fósforo? 2 fósforos? k fósforos?

#combinatória #coeficientes binomiais

Exercício 8

Nível de Complexidade: 2

Um apostador costuma jogar numa lotaria oito vezes por mês, fazendo uma única aposta por sorteio. Suponha que em cada sorteio é extraído um dos números do conjunto $\{1,2,\dots,N\}$ (sendo $N \geq 8$ um número natural fixo) e que apenas são atribuídos prémios aos jogadores que acertam exatamente no número extraído, sendo o valor desses prémios sempre o mesmo em todos os concursos de cada mês e para cada um dos vencedores (tome-o, por exemplo, igual a 1 milhão de euros).

a. O apostador está a estudar a possibilidade de passar a jogar uma única vez por mês, fazendo 8 apostas no mesmo sorteio. Será que aumenta, desta forma, o seu ganho esperado?

   Utilize, com valores adequados de n e de x, a fórmula

   $$\sum_{k=0}^{n} {}^{n}C_k k x^k (1-x)^{n-k} = nx$$

   isto é,

   $$ {}^{n}C_0 0.(1-x)^n + {}^{n}C_1 1x(1-x)^{n-1} + {}^{n}C_2 2x^2(1-x)^{n-2} + \cdots \\ + {}^{n}C_{n-2}(n-2)x^{n-2}(1-x)^2 + (n-1)nx^{n-1}(1-x) + nx^n = nx,$$

   que poderá demonstrar no Exercício 9.

b. Comente o resultado da alínea anterior no caso em que $N = 8$.

#média de uma variável aleatória #provas de Bernoulli

Exercício 9

Nível de Complexidade: 3

Seja $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$.

a. Mostre, aplicando a fórmula do binómio de Newton a uma soma conveniente, que

$$\sum_{k=0}^{n} {}^{n}C_k\, x^k (1-x)^{n-k} \\ = (1-x)^n + n\,x(1-x)^{n-1} + {}^{n}C_2 x^2(1-x)^{n-2} + \cdots \\ + {}^{n}C_{n-2}x^{n-2}(1-x)^2 + nx^{n-1}(1-x) + x^n = 1.$$

b. Seja

$$S=\sum_{k=0}^{n} {}^{n}C_k k\ x^k(1-x)^{n-k}$$
$$= {}^{n}C_0 0.(1-x)^n + {}^{n}C_1 1x(1-x)^{n-1} + {}^{n}C_2 2x^2(1-x)^{n-2} + \cdots$$
$$+ {}^{n}C_{n-2}(n-2)x^{n-2}(1-x)^2 + (n-1)nx^{n-1}(1-x) + nx^n$$

Derivando em ordem a x a igualdade da alínea anterior e multiplicando por x ambos os membros da equação resultante, mostre que (para $x \neq 1$)

$$S = n\frac{x}{1-x} - \frac{x}{1-x}S.$$

c. Deduza que $S = nx$.

#binómio de Newton #coeficientes binomiais #regras de derivação

#Números Complexos

Exercício 10

Nível de Complexidade: 1

a. Considere os números complexos $z_1 = cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$ e $z_2 = cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$.
Mostre que

$$\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

b. Mais geralmente, sejam z_1 e z_2 números complexos de módulo 1, com $1 + z_1z_2 \neq 0$.
Mostre que

$$\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} \in \mathbb{R}.$$

#números complexos de módulo 1 #propriedades da função cis

Exercício 11

Nível de Complexidade: 1

a. Seja $\theta \in \mathbb{R}$. Resolva em $\mathbb{C}$ a equação

$$z^6 - 2z^3\cos(3\theta) + 1 = 0.$$

b. Mais geralmente, dado $n \in \mathbb{N}$, resolva em $\mathbb{C}$ a equação

$$z^{2n} - 2z^n\cos(n\theta) + 1 = 0.$$

#radiciação #resolução de equações complexas

Exercício 12
Nível de Complexidade: 1

Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $(z+i)^4 = (z-1)^4$

#radiciação #resolução de equações complexas

Exercício 13
Nível de Complexidade: 1

a. Utilizando as propriedades da função cis, mostre que

$$z = 1 + \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \left(\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{10}\right) + \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{10}\right)\right)\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{10}\right).$$

b. Deduza da alínea anterior a forma trigonométrica do número complexo $1 + \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

#propriedades da função cis #forma trigonométrica de um número complexo

Exercício 14
Nível de Complexidade: 1

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere a equação $z^3 = \frac{i}{z}$, com $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Resolva a equação e represente, na forma algébrica, a solução que não pertence ao conjunto

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leq 2 \ \wedge \ \frac{\pi}{4} \leq \arg(z - i) \leq \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

#resolução de equações complexas #domínios planos e condições em $\mathbb{C}$

Exercício 15
Nível de Complexidade: 2

a. Seja $\theta \in \mathbb{R}$. Inspirando-se no Exercício 13, mostre que

$$1 + \operatorname{cis}\theta = 2\cos\frac{\theta}{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

b. Seja $n \in \mathbb{N}$ e $w \in \mathbb{C}$, com $|w| = 1$.

   Sejam $z_1, z_2, \dots z_n$ as n soluções da equação $z^n = w$.
   Mostre que as imagens geométricas dos números complexos

$$(1+z_1)^n, (1+z_2)^n, \dots, (1+z_n)^n$$

pertencem a uma mesma reta.

#números complexos #propriedades da função cis #forma trigonométrica #imagem geométrica de um número complexo

Exercício 16

Nível de Complexidade: 2

a. Sejam z_1 e z_2 dois números complexos. Mostre que

$$|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

b. Mostre que a soma dos quadrados das diagonais de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados dos lados.

#módulo de um número complexo #propriedades dos quadriláteros

Exercício 17

Nível de Complexidade: 3

Seja $\theta \in \mathbb{R}$.

a. Justifique que

$$\cos(\theta) = \frac{cis\,(\theta) + cis(-\theta)}{2}.$$

b. Utilizando o binómio de Newton, mostre a seguinte fórmula de trigonometria:

$$\cos^6(\theta) = \frac{1}{32}\cos(6\theta) + \frac{3}{16}\cos(4\theta) + \frac{15}{32}\cos(2\theta) + \frac{5}{16}.$$

c. Inspirando-se nas alíneas anteriores, mostre que

$$\sin^4(\theta) = \frac{1}{8}\cos(4\theta) - \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{3}{8}.$$

e deduza que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}}{2}$.

#propriedades da função cis #fórmulas de De Moivre #aplicações à trigonometria #binómio de Newton

Exercício 18

Nível de Complexidade: 3

Sejam z, w e v números complexos.

a. Mostre que se z e w são não nulos,
$$\left|\frac{z}{|z|^2}-\frac{w}{|w|^2}\right| = \left|\frac{z-w}{zw}\right|.$$

b. Mostre que
$$|z|\,.\,|w-v| \leq |w|\,.\,|z-v| + |v|\,.\,|z-w|$$

c. Deduza da alínea anterior que
$$\forall a,b,c,d \in \mathbb{C}, \qquad |a-c|\,.\,|b-d| \leq |a-b|\,.\,|c-d| + |a-d|\,.\,|b-c|$$

d. Interpretação geométrica

Seja $[ABCD]$ um quadrilátero. Justifique que
$$\overline{AC}\times\overline{BD} \leq \overline{AB}\times\overline{DC} + \overline{AD}\times\overline{BC}.$$

Esta desigualdade é conhecida sobre o nome de *desigualdade de Ptolomeu.*

#módulo de um número complexo #desigualdades #propriedades dos quadriláteros

#Funções Reais de Variável Real

Exercício 19

Nível de Complexidade: 1

Resolva o sistema
$$\begin{cases} x+y=10 \\ \ln x + \ln y = \ln 10 \end{cases}$$

#sistemas de equações #propriedades das funções logarítmicas

Exercício 20

Nível de Complexidade: 1

Resolva a equação
$$x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$$

#funções exponenciais #resolução de equações

Exercício 21

Nível de Complexidade: 1

Considere as funções f e g definidas em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0 \; se \; x \neq 0 \\ 1 \; se \; x = 0 \end{cases} \quad e \quad g(x) = \begin{cases} 0 \; se \; x \neq 0 \\ 2 \; se \; x = 0 \end{cases}$$

Sendo $\lim_{x\to 0} g(x) = l$, mostre que

$$\lim_{x\to 0} f\big(g(x)\big) \neq \lim_{y\to l} f(y).$$

Nota: utiliza-se aqui a definição de limite que ainda vigora no 12º ano, ou seja, para testar a existência de limite de uma função f num ponto a, apenas se consideram sucessões de pontos do domínio de f que nunca tomam o valor a. Com a definição de limite que começou a vigorar no 11.º ano em 2016/17 (as referidas sucessões podem tomar o valor a) passa a estar disponível um teorema do limite da função composta segundo o qual, se $\lim_{x\to a} g(x) = l$ e se $\lim_{y\to l} f(y) = L$, então $\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = L$, apenas com a condição de que a seja aderente ao domínio de $f \circ g$. Com base nesta propriedade podem justificar-se mudanças de variável no cálculo prático de limites.

#definição de limite #composição de limites

Exercício 22

Nível de Complexidade: 1

Considere a função f de domínio $[0, 2\pi]$ definida por $f(x) = \sqrt{1 + \cos x} - 1$.

a. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

b. Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $\frac{\pi}{2}$.

c. Calcule $\lim_{x\to \pi/2} \frac{f(x)}{2x-\pi}$.

#funções trigonométricas #regras de derivação #monotonia e extremos relativos #reta tangente

Exercício 23

Nível de Complexidade: 1

a. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to [a, b]$ uma função contínua.
Mostre que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

b. Sejam agora f e g duas funções contínuas no intervalo $[0,1]$.
Suponha ainda que $f(0) = g(1) = 0$, que $f(1) = g(0) = 1$ e que g não se anula em $]0,1[$. Dado $\alpha \geq 0$, mostre que existe $x_0 \in [0,1[$ tal que

$$\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \alpha.$$

#propriedades das funções contínuas #teorema de Bolzano

Exercício 24

Nível de Complexidade: 1

Considere a função f definida por

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|.$$

a. Determine o domínio de f.
b. Calcule uma expressão para a função derivada f' e calcule os intervalos de monotonia de f.
c. Estude a existência de assíntotas ao gráfico de f.
d. Esboce o gráfico de f.

#funções logarítmicas #regras de derivação #estudo de funções #assíntotas

Exercício 25

Nível de Complexidade: 1

Considere a função f de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{50} \log\left(\frac{1}{x^2}\right)^{2k} = \log\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + \log\left(\frac{1}{x^2}\right)^4 + \cdots + \log\left(\frac{1}{x^2}\right)^{100}.$$

a. Mostre que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) = -5100\log(x)$.

b. Determine o conjunto solução da inequação $f(x) - f(x+1) < f(x-1)$.

#funções logarítmicas #propriedades dos logaritmos #inequações envolvendo logaritmos

Exercício 26

Nível de Complexidade: 2

a. Determine

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 3^x}{x-3}.$$

b. Considere a função real de variável real definida pela expressão $f(x) = x^x$. Justifique que f é diferenciável no seu domínio e obtenha uma expressão para a respetiva função derivada f'.

c. Mostre que

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 3^x}{x^x - 3^3} = \frac{1 - \ln 3}{1 + \ln 3}$$

#Mudança de variável #limites notáveis #regras de derivação #definição de derivada

Exercício 27

Nível de Complexidade: 2

Seja $T > 0$ e $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período T.
Mostre que se o limite $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$ existir então f é constante.

#funções periódicas #definição de limite segundo Heine

Exercício 28

Nível de Complexidade: 3

Considere as funções f e g definidas em $D =]-1, +\infty[$ por

$$f(x) = x - \ln(1 + x) \;\text{ e }\; g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2.$$

a. Explicite os intervalos de monotonia das funções f e g.

b. Deduza da alínea anterior que para todo o $x > 0$,

$$x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1 + x) < x.$$

c. Considere a sucessão de termo geral

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\left(1 + \frac{3}{n^2}\right) \dots \left(1 + \frac{n-1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$$

Mostre que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{e}$.

#estudo de funções #derivação #convergência de sucessões

Exercício 29

Nível de Complexidade: 3

Neste problema pretende-se resolver a equação cúbica $y^3 - 3y + \sqrt{2} = 0$.

a. Mostre que $\sin 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ e determine uma expressão para o valor exato de $\cos 15°$.

b. Mostre que $\sin \alpha$ é solução da equação $4x^3 - 3x + \sin(3\alpha) = 0$.
Determine ainda as restantes soluções da equação em função de $\cos \alpha$ e $\sin \alpha$.

c. Utilizando as duas alíneas anteriores, resolva a equação $y^3 - 3y + \sqrt{2} = 0$.

#Fórmulas trigonométricas #Resolução de equações

#Geometria

Exercício 30

Nível de Complexidade: 1

Seja $Oxyz$ um referencial ortonormado do espaço.
Considere a superfície esférica S de equação

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 1 = 0.$$

a. Determine o centro e o raio de S.
b. Considere as retas

$$r : x = 2y + 1 \ \wedge \ z = y + 4$$

e

$$s : x - y + z + 1 = 0 \ \wedge \ 2x - y + 9 = 0$$

Determine os planos tangentes a S paralelos simultaneamente às retas r e s.

#geometria do espaço #posição relativa de retas e planos #planos tangentes a uma superfície esférica

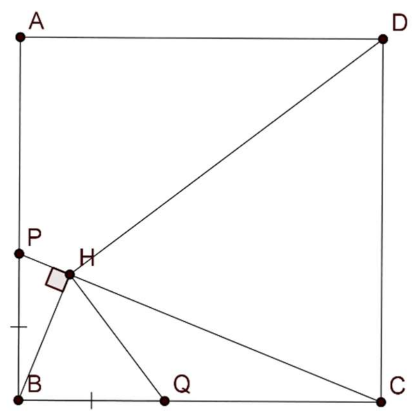
Exercício 31

Nível de Complexidade: 2

Considere, no plano, um quadrado $[ABCD]$. Sejam P e Q dois pontos pertencentes respetivamente aos lados $[AB]$ e $[BC]$, tais que $\overline{PB} = \overline{QB}$.

Seja $H \in [PC]$ tal que $BH \perp PC$.

Mostre que as retas QH e HD são perpendiculares.



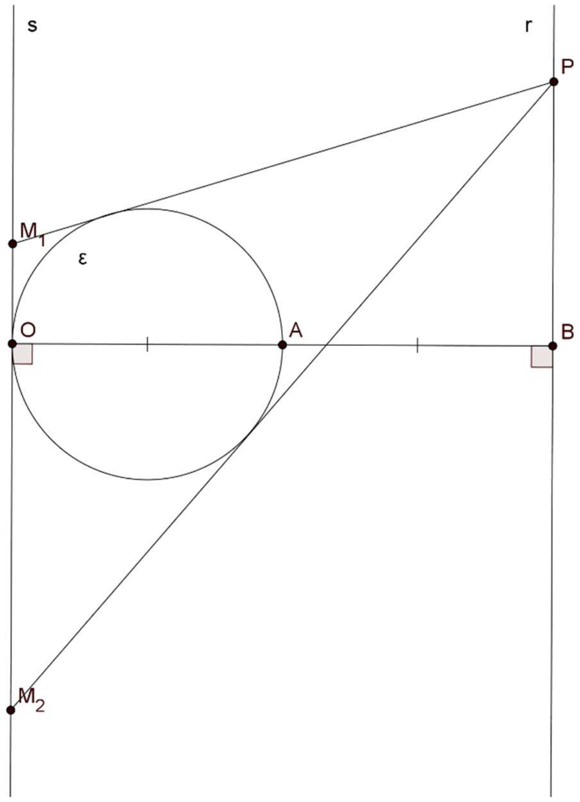
#geometria do plano #perpendicularidade

Exercício 32

Nível de Complexidade: 3

Sejam O, A e B três pontos do plano tais que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$. Seja r a reta perpendicular a AB que passa por B, s a reta perpendicular a AB que passa por O e $\mathcal{E}$ a circunferência de diâmetro $[OA]$.

Para $P \in r$, sejam M_1 e M_2 as interseções das retas tangentes a $\mathcal{E}$ que passam por P com a reta s.



a. Mostre que $\overrightarrow{OM_1}.\overrightarrow{OM_2} = -\frac{1}{2}\overline{OA}^2$.
   (Poderá considerar um referencial ortonormado Oxy tal que A pertença ao semi-eixo positivo das abcissas.

b. Define-se o centro de gravidade G do triângulo $[PM_1M_2]$ pela relação
$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}\right).$$
   Mostre que quando o ponto P se desloca na reta r o centro de gravidade do triângulo $[PM_1M_2]$ permanece fixo.

#cálculo vetorial #produto escalar #reta tangente a uma circunferência