REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2018

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

---

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: $\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $\textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

GRUPO I

Um hotel está a publicitar um programa especial para um fim de semana festivo.

1. Para esse fim de semana, o hotel dispõe de 24 quartos triplos, 30 quartos duplos e 14 quartos individuais.

O hotel disponibiliza dois tipos de pacotes, I e II, que diferem na oferta de quartos duplos, triplos e individuais, para vender a operadores turísticos.

Para se determinar o número de pacotes de cada tipo que o hotel deve vender, de modo a obter o valor máximo de receita, construiu-se o seguinte sistema de restrições:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 24 \\ 4x + 3y \leq 30 \\ 2x + y \leq 14 \end{cases}$$

Neste sistema, x e y representam, respetivamente, o número de pacotes do tipo I e o número de pacotes do tipo II que o hotel pode vender.

1.1. Identifique o número de quartos triplos, o número de quartos duplos e o número de quartos individuais que compõem cada um dos tipos de pacotes.

1.2. O preço de venda de cada pacote do tipo I é 600 euros, e o preço de venda de cada pacote do tipo II é 400 euros.

Determine o número de pacotes de cada tipo que o hotel deve vender, para obter o valor máximo de receita.

Na sua resposta, apresente:

– a função objetivo;

– uma representação gráfica da região admissível referente ao sistema de restrições;

– a solução do problema.

2. Numa atividade organizada pela equipa de animação do hotel, um animador coloca cinco bolas indistinguíveis ao tato, quatro azuis e uma verde, num saco opaco, para fazer um sorteio.

O animador retira, ao acaso, duas bolas do saco, uma de cada vez e sem reposição, e regista a cor de cada bola retirada.

Seja X a variável aleatória «número de bolas azuis retiradas».

Determine o valor médio da variável aleatória X .

Na sua resposta, apresente a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X .

3. Admita que a altura, em centímetros, dos funcionários do hotel segue uma distribuição normal de valor médio 160 cm e desvio padrão 10 cm .

Qual é a probabilidade de um funcionário do hotel, escolhido ao acaso, ter entre 170 cm e 180 cm de altura?

Apresente o resultado arredondado às centésimas.

Na sua resposta, utilize valores de probabilidade da distribuição normal constantes do formulário.

Em cálculos intermédios, não proceda a arredondamentos.

GRUPO II

O hotel localiza-se nos Açores e oferece aos hóspedes atividades na praia. Para planear as atividades, a equipa de animação consulta regularmente as previsões da altura de maré no sítio do Instituto Hidrográfico.

1. Com base em previsões do Instituto Hidrográfico para a altura de maré no porto de Angra do Heroísmo, na ilha Terceira, referentes a um período de cinco dias, obteve-se o seguinte modelo:

$$h(t) = 0{,}993 + 0{,}484 \times \operatorname{sen}(0{,}496t + 2{,}196) \text{ , com } t \in [0, 120]$$

Este modelo dá, aproximadamente, a altura de maré, h , em metros, em função do tempo, t , em horas, decorrido a partir de um certo instante inicial. O argumento da função seno está em radianos.

Determine, de acordo com o modelo apresentado, a diferença dos valores máximo e mínimo da altura de maré no primeiro dia do referido período.

Apresente o resultado, em metros, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, não proceda a arredondamentos.

2. Com base em previsões do Instituto Hidrográfico para a altura de maré no porto da Horta, na ilha do Faial, para o dia 27 de julho de 2016, foi construído o gráfico da Figura 1, que não está à escala.

Nesta figura:

- t representa o tempo, em horas, decorrido desde as zero horas do dia 27 de julho de 2016;
- $f(t)$ representa a altura de maré, em metros, no instante t .

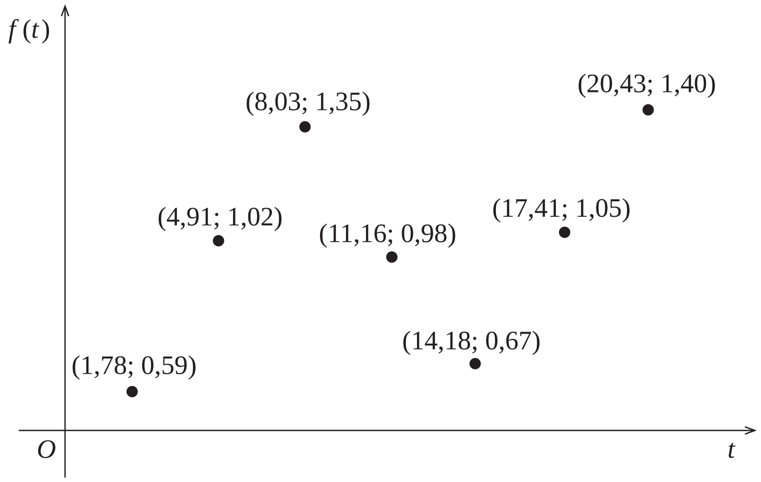

Figura 1

Considere válido um modelo de regressão sinusoidal, $y = a\,\text{sen}(bx + c) + d$, com o argumento da função seno em radianos, obtido a partir das coordenadas dos pontos representados na Figura 1.

Estime, com base nesse modelo, a altura de maré no porto da Horta, às 12 horas do dia 27 de julho de 2016.

Na sua resposta, apresente os valores de a , b , c e d arredondados às centésimas.

Apresente o resultado, em metros, arredondado às centésimas.

Em cálculos intermédios, não proceda a arredondamentos.

GRUPO III

Vai realizar-se no hotel uma conferência internacional da indústria de telecomunicações móveis. Esta indústria está em constante evolução e, ano após ano, tem aumentado o seu destaque nos mercados mundiais.

1. Um determinado tipo de telemóvel começou a ser comercializado em 2007.

Admita que o número, N , em milhões, de telemóveis daquele tipo vendidos desde o início da sua comercialização até ao instante t pode ser dado, aproximadamente, durante os anos de 2008 a 2015, por

$$N(t) = 1{,}061 \times 1{,}034^{\frac{t}{30}}$$

Neste modelo, t é o tempo, em dias, decorrido desde as zero horas do dia 1 de janeiro de 2008.

1.1. Determine o número de telemóveis daquele tipo vendidos desde o início da sua comercialização até às zero horas do dia 1 de janeiro de 2008.

1.2. De acordo com o modelo apresentado, num determinado ano, o número total de telemóveis daquele tipo vendidos, desde o início da sua comercialização, ultrapassou, pela primeira vez, 2 milhões.

Determine o ano em que tal ocorreu.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

1.3. O mês de fevereiro de 2008 teve 29 dias.

Interprete a expressão $N(60) - N(31) \approx 0{,}04$ no contexto descrito.

2. Uma empresa personaliza capas para telemóveis.

Admita que o número, C , de tipos de capa existentes no catálogo da empresa, no instante t , em meses, pode ser dado, aproximadamente, por

$$C(t) = a \log(bt + 10) \ , \text{ com } t \in [0, 12] \ ,$$

em que a e b são números reais não nulos e $t = 0$ corresponde ao instante em que a empresa iniciou a sua atividade.

Considere que cada mês tem trinta dias.

2.1. Quando iniciou a sua atividade, a empresa tinha um catálogo com 700 tipos de capa.

Passados dois meses, o número de tipos de capa existentes no catálogo triplicou.

Determine o valor de a e o valor de b .

2.2. Seja T a função que dá a taxa de variação instantânea da função C, para cada valor de t.

Considere a afirmação seguinte.

> De acordo com a função C, no instante em que a empresa completou o primeiro trimestre da sua atividade, o número de tipos de capa existentes no catálogo estava a aumentar a uma taxa de 101 unidades por mês, aproximadamente.

A afirmação anterior é uma interpretação da expressão $T(r) \approx s$, em que r e s designam certos números reais.

Identifique o valor de r e o valor de s.

GRUPO IV

No hotel, vai realizar-se um curso de formação sobre Matemática e Arte, com base em obras de Almada Negreiros.

1. Admita que, inicialmente, todos os participantes no curso se cumprimentam com um único aperto de mão.

O número total de apertos de mão depende do número de participantes, como se exemplifica na tabela seguinte.

Número de participantes	**Número total de apertos de mão**
2	1
3	$3 = 1 + 2$
4	$6 = 1 + 2 + 3$
5	$10 = 1 + 2 + 3 + 4$

Assim, caso estejam presentes n participantes, com $n \geq 2$, o número total de apertos de mão dados inicialmente é

$$1 + 2 + ... + (n - 1)$$

1.1. Mostre que o número total de apertos de mão dados inicialmente, caso estejam presentes n participantes, é

$$\frac{n^2 - n}{2}$$

1.2. Admita que, inicialmente, foram dados exatamente 2556 apertos de mão.

Determine o número de participantes no curso.

2. A Figura 2 é uma fotografia de parte da obra de Almada Negreiros intitulada *Começar*.

Dois dos elementos geométricos que se encontram em *Começar* são um pentagrama e uma circunferência, representados na Figura 3. Nesta figura:

- os pontos A, B, C, D e E são os vértices do pentagrama pertencentes à circunferência;
- os pontos F, G, H, I e J são os restantes vértices do pentagrama;
- o pentagrama está decomposto no pentágono regular $[FGHIJ]$ e em cinco triângulos isósceles geometricamente iguais;
- o ponto O é o centro da circunferência e do pentágono regular;
- o ponto M é o ponto médio de $[FG]$, sendo $[OM]$ o apótema do pentágono regular e $[MB]$ a altura do triângulo isósceles $[FBG]$ relativa a $[FG]$.

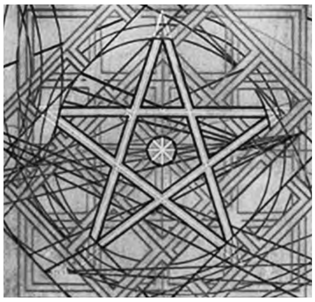

Figura 2

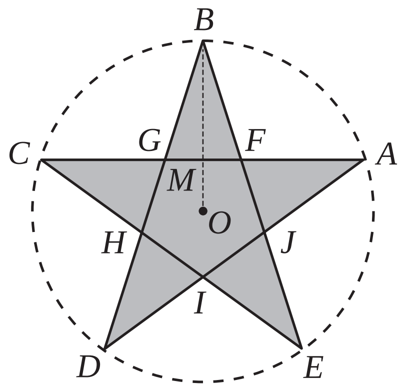

Figura 3

2.1. Identifique o lado extremidade do ângulo orientado com lado origem $\dot{O}A$ e 504^{o} de amplitude.

Justifique a sua resposta.

2.2. Admita que $\overline{OB} = 1 \text{ cm}$ e que $\overline{OM} = 0{,}309 \text{ cm}$.

Determine a área do pentagrama.

Apresente o resultado, em cm^2, arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, utilize três casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

Grupo	Item					
	Cotação (em pontos)					
I	**1.1.**	**1.2.**	**2.**	**3.**		
	10	20	15	15		**60**
II	**1.**	**2.**				
	15	15				**30**
III	**1.1.**	**1.2.**	**1.3.**	**2.1.**	**2.2.**	
	10	10	10	15	10	**55**
IV	**1.1.**	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**		
	15	10	15	15		**55**
TOTAL						**200**